В.А. Лецко
Волгоградский государственный
педагогический университет

ОБОБЩЕННЫЕ ТУРНИРЫ-ПЕРЕВЕРТЫШИ

Математика, естественные науки и методика их преподавания

Чемпионат России 2006 г. по футболу выиграл футбольный клуб ЦСКА. «Спартак» набрал то же количество очков, что и армейский клуб, но уступил конкуренту по дополнительным показателям. Однако болельщики «Спартака» утверждают, что именно их любимая команда была сильнее всех. Ведь система подсчета очков, при которой за победу команде начисляется 3 очка, за ничью – 1 очко, а за поражение – 0 очков, была введена относительно недавно. Если же подсчитать очки по старой системе, при которой за победу начислялось всего 2 очка, то «Спартак» окажется впереди ЦСКА на целых три очка. Болельщики армейцев резонно возражают, что регламент первенства был утвержден заранее и известен всем участникам.

Автор не берется рассудить болельщиков, полагая, что они никогда не придут к консенсусу. Предыдущий пример приведен лишь для того, чтобы проиллюстрировать очевидный факт: при подсчете очков по разным системам итоговые таблицы одного и того же турнира могут существенно отличаться. Наша цель – выяснить, что же скрывается под словом «существенно». Могут ли участники первенства в результате перехода к другой системе подсчета очков расположиться в итоговой таблице в обратном порядке?

Дабы не погрязнуть в сравнении дополнительных показателей (количество побед, разность забитых и пропущенных мячей, результаты личных встреч команд, набравших одинаковое количество очков), которые меняются от соревнования к соревнованию, договоримся рассматривать лишь такие турниры, в которых никакие две команды не набрали поровну очков. Такие турниры мы будем называть «строгими». Если в строгом турнире при подсчете очков по старой системе участники выстраиваются определенным образом, а при новой системе – в обратном порядке и строгость турнира сохраняется, то такой турнир будем называть «перевертышем».

Таблица 1

Количество команд (n)	Число кругов (—k)
2	-
4	13
3	10
6	9
5, 8	8
7, 9, 10, 12, 14, 16	7
остальные n > 1	6

В работе [2] автором совместно с И. Г. Шевчуковым описаны минимальные возможные параметры турниров-перевертышей для случая, когда сравниваются результаты по старой и действующей системам подсчета очков в футболе. В табл. 1 для каждого возможного количества участников кругового турнира указано минимальное число кругов, при которых данный турнир может оказаться перевертышем.

В настоящей статье результаты работы [2] обобщаются на произвольные системы подсчета очков.

Пусть за победу команде присуждается v, за ничью – s, а за поражение – f очков. Единственное требование, которому должны удовлетворять эти числа: $v > s > f$. В остальном же числа v, s, f могут быть совершенно произвольными, в том числе дробными и даже иррациональными. Число $c=(v-f)/(s-f)$ назовем характеристикой системы подсчета очков.

Две системы подсчета очков назовем изоморфными, если при поочередном подведении итогов сначала по одной системе, а затем — по другой команды не меняют своих позиций в итоговой таблице любого турнира. Не трудно доказать, что две системы подсчета очков изоморфны тогда и только тогда, когда их характеристики равны.

В каждом классе изоморфных между собой систем с данной характеристикой *c* имеется система подсчета очков, в которой $f=0, s=1, v=c$. Такие системы будем называть нормализованными. Понятно, что достаточно рассматривать лишь нормализованные системы. Систему подсчета очков назовем «агрессивной», если $c > 2$, «миролюбивой» — если $c < 2$ и «равновесной» — если $c = 2$. Таким образом, старая система подсчета очков в футболе является равновесной, а новая – агрессивной.

Пусть c_1 и c_2 характеристики двух систем подсчета очков и $c_1 < c_2$. Для удобства и по аналогии с ситуацией в футболе будем называть систему подсчета с характеристикой c^1 старой, а с характеристикой c_2 – новой. Нумеровать команды будем в соответствии с местами, занятыми по старой системе.

Предположим, что в турнире участвует *n* команд и соревнование проводится в *k* кругов (то есть каждая команда встречается с каждой *k* раз). Наша цель выяснить, при каком наименьшем *k* переход от системы c_1 к системе c_2 может (при подходящем n) перевернуть турнирную таблицу. Может показаться (автору поначалу так и казалось), что количество кругов в турнире-перевертыше будет тем больше, чем меньше отличаются друг от друга числа c_1 и c_2. Однако зависимость оказалась несколько иной.

Пусть u и hv такие наименьшие натуральные числа, что $uc^1 < h < uc^2$, а $w = k - u$. Тогда *i*-я команда должна иметь в турнире-перевертыше, по крайней мере, на u побед меньше и на h ничьих больше, чем команда, занявшая i+1-е место. Рассмотрим столбцы итоговой таблицы турнира-перевертыша, в которых представлены суммарные показатели выигрышей, ничьих и поражений для каждой команды (табл. 2).

Таблица 2

№	Выигрыши	Ничьи	Поражения
1	v(1)	s(1)	f(1)
2	v(2)	s(2)	f(2)
3	v(3)	s(3)	f(3)
....			
n	v(n)	s(n)	f(n)

Пусть $v(i) = v(i+1) - u$, $s(i) = s(i+1) + h$, $f(i) = f(i+1) - w$ для всех допустимых i, т.е. различия между показателями в соседних стоках таблицы достигают наименьших возможных значений. Ясно, что $\sum_{i=1}^{n} v(i) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$. Отсюда, учитывая, что v(i) и f(i) — арифметические прогрессии, получаем $\mathrm{v}(1) + \mathrm{v}(\mathrm{n}) = \mathrm{f}(1) + \mathrm{f}(\mathrm{n})$. Но $v(n) = v(1) + (n-1)u$ и $f(n) = f(1) + (n-1)(h-u)$. Поэтому

$$\mathrm{v}(1) = (2\mathrm{f}(1) + (\mathrm{n}-1)(\mathrm{h}-2\mathrm{u})/2 \geq (\mathrm{n}-1)(\mathrm{h}-2\mathrm{u})/2. \qquad (1)$$

Посчитаем двумя способами общее число матчей, сыгранных первой командой в k-круговом турнире: $(n-1)k = v(1) + s(1) + f(1) \geq v(1) + (n-1)h$. Учитывая соотношение (1), получим оценку снизу для числа кругов ($\lceil x \rceil$ — потолок числа x, т.е. наименьшее целое, не меньшее x):

$$k \geq \lceil (3h - 2u)/2 \rceil. \qquad (2)$$

Получая неравенство (2), мы пренебрегли величиной f(1), положив ее равной 0. Рассуждая аналогично, но на этот раз пренебрегая величиной v(1), получим еще одну оценку для числа кругов в турнире-перевертыше:

$$k \geq \lceil (3h - 2w)/2 \rceil. \qquad (3)$$

Пусть $d = \min(u, w)$. Тогда неравенства (2) и (3) можно объединить:

$$k \geq \lceil (3h - 2d)/2 \rceil. \qquad (4)$$

Отметим, что если $2 \leq c_1 < c_2$, то $u < w$ и неравенство (4) равносильно (2). Если , то $w < u$ и (4) равносильно (3). Наконец, если $c_1 < c_2 \leq 2$, то h=2, u=w=1 и неравенства (2) и (3) дают одну и ту же оценку $k \geq 3$.

Доказательство достижимости оценки (4) наиболее просто именно в последнем случае. Для любых $c_1 < 2 < c_2$ существует 3-круговой турнир-перевертыш уже при n = 5. Табл. 3 показывает, как он устроен.

Отметим, что c_1 и c_2 могут отличаться на сколь угодно малую величину. Главное, чтобы одна из этих характеристик была меньше 2, а другая — больше. Перейдем к рассмотрению случая $2 \leq c_1 < c_2$. Если h нечетно, то построение таблицы турнира-перевертыша является естественным обобщением случая $c_1 = 2, c_2 = 3$, рассмотренного в работе [2]. Докажем, что $k = (3h + 1 - 2u)/2$ является для нечетных h точной нижней границей k.

Возьмем $n = 2h + 1$. Пусть x(i, j), y(i, j) и z(i, j) — количества выигрышей, ничьих и поражений в соответствующих клетках таблицы. Тогда $\mathrm{z}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \mathrm{k} - \mathrm{x}(\mathrm{i},\mathrm{j}) - \mathrm{y}(\mathrm{i},\mathrm{j})$, $\mathrm{x}(\mathrm{j},\mathrm{i}) = \mathrm{z}(\mathrm{i},\mathrm{j})$ и $\mathrm{y}(\mathrm{j},\mathrm{i}) = \mathrm{y}(\mathrm{i},\mathrm{j})$. Поэтому достаточно заполнить лишь ту часть таблицы, для которой $i < j$, и указать, лишь значения x и y.

Положим:

$\mathrm{y}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \mathrm{h}+1, \mathrm{x}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \mathrm{k}-\mathrm{h}-1$ для $j \leq h+1$;

$\mathrm{y}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \mathrm{h}, \ \mathrm{x}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \mathrm{k}-\mathrm{h}$, для $j > h+1, i+j \leq n+1$;

$\mathrm{y}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = 0, \ \mathrm{x}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \mathrm{h}-\mathrm{u}$ для $i \leq h+1, \ i+j > n+1$ и для $i > h+1, \ j \leq i+(h-1)/2$;

$\mathrm{y}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = 0, \ \mathrm{x}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \mathrm{h}-\mathrm{u}+1$ для $i > h+1, j > i+(h-1)/2$.

То, что в результате получится таблица турнира-перевертыша, проверяется простым подсчетом очков по старой и новой системам. Проиллюстрируем этот случай конкретным примером. Пусть, например, $c_1 = 4, c_2 = 5$. Тогда $u = 2$, $h = 9$. Поэтому для $k = (3h + 1 - 2u)/2 = 12$, $n = 2h + 1 = 19$ существует турнир-перевертыш, представленный в табл. 4.

Рассмотрим теперь случай четного h, большего 2. Для построения турнира-перевертыша из $k = (3h - 2u)/2$ кругов возьмем $n = 2h + 2$. Вновь укажем количество побед и ничьих в каждой клетке, расположенной выше главной диагонали. Остальные параметры таблицы легко определяются на основании этих данных.

Положим:

$\mathrm{y}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \mathrm{h}+1, \mathrm{x}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \mathrm{k}-\mathrm{h}-1$ для $j \leq h+1$;

$\mathrm{y}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \mathrm{h}, \ \mathrm{x}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \mathrm{k}-\mathrm{h}$, для $j > h+1, i+j \leq n$;

$\mathrm{y}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = 0, \ \mathrm{x}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \mathrm{k}$ для $i+j = n+1$;

$\mathrm{y}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = 0, \mathrm{x}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \mathrm{h}-\mathrm{u}-1$ для $i \leq h+1, \ i+j > n+1$;

$\mathrm{y}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = 0, \ \mathrm{x}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \mathrm{h}-\mathrm{u}$ для $i > h+1, \ j \leq i+h/2$;

$\mathrm{y}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = 0, \ \mathrm{x}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \mathrm{h}-\mathrm{u}+1$ для $i > h+1, j > i+h/2$.

Таблица 3

	1	2	3	4	5	Выигрыши	Ничьи	Поражения	Старая система	Новая система
1	X	0 3 0	0 3 0	1 2 0	0 2 1	1	10	1	$10+c_1$	$10+c_2$
2	0 3 0	X	0 3 0	0 2 1	2 0 1	2	8	2	$8+2c_1$	$8+2c_2$
3	0 3 0	0 3 0	X	2 0 1	1 0 2	3	6	3	$6+3c_1$	$6+3c_2$
4	0 2 1	1 2 0	1 0 2	X	2 0 1	4	4	4	$4+4c_1$	$4+4c_2$
5	1 2 0	1 0 2	2 0 1	1 0 2	X	5	2	5	$2+5c_1$	$2+5c_2$

В качестве иллюстрации этого случая построим таблицу турнира-перевертыша для $c_1 = 3.3,\ c_2 = 3.5$. Тогда $u = 3, h = 10$, $k = (3h - 2u)/2 = 12$ и $n = 2h + 2 = 22$. В общем случае заполняемая часть таблицы разбивается на 12 областей, к каждой из которых применяется свой способ заполнения. Однако при не слишком больших h и u значения в клетках, принадлежащих разным областям, могут оказаться одинаковыми, хотя и рассчитываются по разным формулам. Так, в нашем примере $h - u - 1$ получается равным $k - (h - u - 1)$. Поэтому соответствующие области табл.5, задаваемые условиями $i \le h + 1$, $i + j > n + 1$ и $j \le h + 1$, $i + j > n + 1$, оказываются заполненными одинаково.

Нам осталось рассмотреть ситуацию, когда обе системы подсчета очков не являются агрессивными, т.е. $c_1 < c_2 \le 2$. Оказывается, построить таблицу турнира перевертыша для этого случая совсем просто. Пусть $uc_1 < h < uc_2$. Тогда $w = h - u <$ u. Временно поменяем местами числа u и w и построим таблицу перевертыша так, как это описано выше. В полученной таблице остается изменить исход каждой встречи на противоположный. Так, табл. 4 может служить примером турнира-перевертыша для $c_1 = 1.25, c_2 = 1.3$, если победы считать поражениями, и наоборот. Таким образом, наши перевертыши еще раз оправдали свое название.

Подведем некоторые итоги. Для любых двух неизоморфных систем подсчета очков существуют турниры-перевертыши. Число кругов в турнире-перевертыше не может быть меньше трех. Трехкруговые турниры-перевертыши существуют в том и только в том случае, когда одна из систем подсчета очков миролюбива, а другая — агрессивна. Наименьшее количество кругов в перевертыше в ситуациях, когда обе системы подсчета очков агрессивны, обе миролюбивы или одна из них равновесна, равно четырем.

Наименьшие число кругов и количество участников турнира-перевертыша, а также его структура полностью определены параметрами *h* и *u*. Иными словами, пары характеристик $c_1 < c_2$ и $c_1' < c_2'$ могут быть различны, но если наименьшие натуральные h и u, для которых выполняется неравенство $uc_1 < h < uc_2$, подходят и для пары c_1', c_2', то всякая таблица-перевертыш построенная для первой пары характеристик, будет подходить и для второй. Легко видеть, что наименьшие h и u должны быть взаимно просты (иначе они не были бы наименьшими). С другой стороны, для любых взаимно простых натуральных чисел *h* и *u*, таких, что $h > u$, найдется пара c_1, c_2, приводящая к данным h и u.

В подавляющем большинстве исследованных нами случаев количество участников, равное $2h + 1$ при нечетных и *h* и $2h + 2$ при четных, является наименьшим n, при котором достигается наименьшее *k*. Однако в общем случае это не так. Например, при $h = 6, u = 1$ наименьшее k, равное 8, достигается уже при восьми участниках. В табл. 6 приведен соответствующий пример.

Таблица 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	Выигрыши	Ничьи	Поражения	Старая система	Новая система
1	X	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	3 9	3 9	3 9	3 9	3 9	3 9	3 9	3 9	3 9	45	171	0	351	396
2	0 10	X	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	3 9	3 9	3 9	3 9	3 9	3 9	3 9	3 9	7 0	47	162	7	350	397
3	0 10	0 10	X	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	3 9	3 9	3 9	3 9	3 9	3 9	3 9	7 0	7 0	49	153	14	349	398
4	0 10	0 10	0 10	X	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	3 9	3 9	3 9	3 9	3 9	3 9	7 0	7 0	7 0	51	144	21	348	399
5	0 10	0 10	0 10	0 10	X	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	3 9	3 9	3 9	3 9	3 9	7 0	7 0	7 0	7 0	53	135	28	347	400
6	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	X	2 10	2 10	2 10	2 10	3 9	3 9	3 9	3 9	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	55	126	35	346	401
7	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	X	2 10	2 10	2 10	3 9	3 9	3 9	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	57	117	42	345	402
8	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	X	2 10	2 10	3 9	3 9	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	59	108	49	344	403
9	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	X	2 10	3 9	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	61	99	56	343	404
10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	X	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	63	90	53	342	405
11	0 9	0 9	0 9	0 9	0 9	0 9	0 9	0 9	0 9	5 0	X	7 0	7 0	7 0	7 0	8 0	8 0	8 0	8 0	65	81	70	341	406
12	0 9	0 9	0 9	0 9	0 9	0 9	0 9	0 9	5 0	5 0	5 0	X	7 0	7 0	7 0	7 0	8 0	8 0	8 0	67	72	77	340	407
13	0 9	0 9	0 9	0 9	0 9	0 9	0 9	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	X	7 0	7 0	7 0	7 0	8 0	8 0	69	63	84	339	408
14	0 9	0 9	0 9	0 9	0 9	0 9	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	X	7 0	7 0	7 0	7 0	8 0	71	54	91	338	409
15	0 9	0 9	0 9	0 9	0 9	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	X	7 0	7 0	7 0	7 0	73	45	98	337	410
16	0 9	0 9	0 9	0 9	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	4 0	5 0	5 0	5 0	5 0	X	7 0	7 0	7 0	75	36	105	336	411
17	0 9	0 9	0 9	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	4 0	4 0	5 0	5 0	5 0	5 0	X	7 0	7 0	77	27	112	335	412
18	0 9	0 9	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	4 0	4 0	4 0	5 0	5 0	5 0	5 0	X	7 0	79	18	119	334	413
19	0 9	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	4 0	4 0	4 0	4 0	5 0	5 0	5 0	5 0	X	81	9	126	333	414

Таблица 5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	Выиг-рыши	Ничьи	Пора-жения	Старая система	Новая система
1	X	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	12 0	42	210	0	348.6	357
2	0 11	X	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	12 0	6 0	45	200	7	348.5	357.5
3	0 11	0 11	X	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	12 0	6 0	6 0	48	190	14	348.4	358
4	0 11	0 11	0 11	X	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	12 0	6 0	6 0	6 0	51	180	21	348.3	358.5
5	0 11	0 11	0 11	0 11	X	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	12 0	6 0	6 0	6 0	6 0	54	170	28	348.2	359
6	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	X	1 11	1 11	1 11	1 11	1 11	2 10	2 10	2 10	2 10	2 10	12 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	57	160	35	348.1	359.5
7	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	X	1 11	1 11	1 11	1 11	2 10	2 10	2 10	2 10	12 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	60	150	42	348	360
8	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	X	1 11	1 11	1 11	2 10	2 10	2 10	12 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	63	140	49	347.9	360.5
9	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	X	1 11	1 11	2 10	2 10	12 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	66	130	56	347.8	361
10	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	X	1 11	2 10	12 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	69	120	63	347.7	361.5
11	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	0 11	X	12 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	72	110	70	347.6	362
12	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 0	X	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	8 0	8 0	8 0	8 0	8 0	75	100	77	347.5	362.5
13	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 0	6 0	5 0	X	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	8 0	8 0	8 0	8 0	78	90	84	347.4	363
14	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 0	6 0	6 0	5 0	5 0	X	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	8 0	8 0	8 0	81	80	91	347.3	363.5
15	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 0	6 0	6 0	6 0	5 0	5 0	5 0	X	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	8 0	8 0	84	70	98	347.2	364
16	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 0	6 0	6 0	6 0	6 0	5 0	5 0	5 0	5 0	X	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	8 0	87	60	105	347.1	364.5
17	0 10	0 10	0 10	0 10	0 10	0 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	X	7 0	7 0	7 0	7 0	7 0	90	50	112	347	365
18	0 10	0 10	0 10	0 10	0 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	4 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	X	7 0	7 0	7 0	7 0	93	40	119	346.9	365.5
19	0 10	0 10	0 10	0 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	4 0	4 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	X	7 0	7 0	7 0	96	30	126	346.8	366
20	0 10	0 10	0 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	4 0	4 0	4 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	X	7 0	7 0	99	20	133	346.7	366.5
21	0 10	0 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	4 0	4 0	4 0	4 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	X	7 0	102	10	140	346.6	367
22	0 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	6 0	4 0	4 0	4 0	4 0	4 0	5 0	5 0	5 0	5 0	5 0	X	105	0	147	346.5	367.5

Таблица 6

	1	2	3	4	5	6	7	8	Победы	Ничьи	Пора-жения
1	X	0 8 0	0 8 0	0 8 0	2 6 0	2 6 0	2 6 0	8 0 0	14	42	0
2	0 8 0	X	0 8 0	0 8 0	2 6 0	2 6 0	8 0 0	3 0 5	15	36	5
3	0 8 0	0 8 0	X	0 8 0	2 6 0	8 0 0	3 0 5	3 0 5	16	30	10
4	0 8 0	0 8 0	0 8 0	X	8 0 0	3 0 5	3 0 5	3 0 5	17	24	15
5	2 6 0	2 6 0	2 6 0	0 0 8	X	6 0 2	6 0 2	6 0 2	18	18	20
6	2 6 0	2 6 0	0 0 8	5 0 3	2 0 6	X	6 0 2	6 0 2	19	12	25
7	2 6 0	0 0 8	5 0 3	5 0 3	2 0 6	2 0 6	X	6 0 2	20	6	30
8	0 0 8	5 0 3	5 0 3	5 0 3	2 0 6	2 0 6	2 0 6	X	21	0	35

Общая формула для нахождения наименьших n для соответствующих k автору не известна.

Так какая же система подсчета очков наиболее справедлива? Автор убежден, что равновесная система является самым объективным мерилом. В свое время в футболе отказались от нее, мотивируя это решение борьбой с договорными ничьими. Но, как говорится, «за что боролись...». Легко можно представить себе ситуацию, когда команды А и Б в упорной борьбе сыграли вничью оба матча между собой и завоевали по два очка, а команда В без чрезмерного напряжения сил, без травм, предупреждений и удалений победила команду Г на своем поле, а затем «вернула ей должок» на выезде. При этом команды В и Г наберут по три очка и получат преимущество над несговорчивыми А и Б. Анализ некоторых матчей российского первенства и поведения букмекеров показывает, что представленная ситуация не так уж гипотетична. Разумеется, нечистоплотные спортивные функционеры будут изыскивать варианты махинаций при любых системах подсчета очков. Однако в ситуации, когда в каждой встрече разыгрывается фиксированное, не зависящее от исхода количество очков (а это происходит только при равновесной системе подсчета), возможностей для закулисных маневров значительно меньше.

Литература

1. Заславский А., Френкин Б.. Математика турниров // Квант. 2007. № 1, 2.

2. Лецко В., Шевчуков И. Турниры-перевертыши // Потенциал. 2008. № 10.